Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Übung 2

Tutoraufgabe 1 (Stacks):

Betrachten Sie folgenden Stack, welcher mit einem Array implementiert wurde.

1	4	6	8	3	7	2

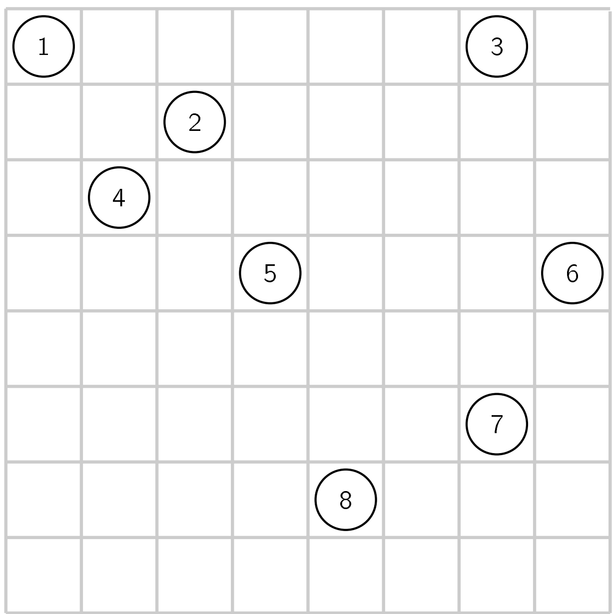
a) Welche Zahl wird durch Top als nächstes ausgegeben?

b) Geben Sie alle Zahlen an, welche nach der Zahl 6 in den Stack eingefügt wurden.

c) Zeichnen Sie den Stack erneut nachdem Sie die Zahl 5 eingefügt haben.

Tutoraufgabe 2 (Quadtrees):

Betrachten Sie folgende Karte, auf der wichtige Sehenswürdigkeiten mit Nummern markiert worden sind:



a) Zeichnen Sie einen Quadtree für diese Karte, welcher die Sehenswürdigkeiten auf der Karte lokalisiert. Dabei sollen alle notwendigen Knoten gezeichnet werden, es können also auch leere Blätter vorkommen, jedoch muss der Baum nicht vollständig sein. Tragen Sie die Nummern der Sehenswürdigkeiten in den entsprechenden Blättern ein.

b) Welche Höhe hat ihr Quadtree?

c) Wäre es möglich mit einem Quadtree, dessen Höhe um eins geringer ist, den Ort der Sehenswürdigkeiten mit geringerer Genauigkeit ebenfalls anzugeben? Falls ja, zeichnen Sie den entsprechenden Quadtree. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort.

Tutoraufgabe 3 (Adjazenzlisten):

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzliste gespeichert wird:

$$
\begin{aligned}
&1 : 2, 3\\
&2 : 4, 5, 6\\
&3 : 6\\
&4 :\\
&5 : 6\\
&6 :\\
&7 : 3
\end{aligned}
$$

a) Ist der Graph G (schwach) zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist der Graph G stark zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist der Graph G planar? Begründen Sie ihre Antwort.

Tutoraufgabe 4 (O-Notation):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \in O(n^5)$

b) $\log_2(n) \in O(n)$

c) $\forall \epsilon > 0\colon \sqrt{n} \in O\left(n^{\epsilon}\right)$

d) Wenn $g \in O(f)$ gilt, dann auch $f \in \Omega(g)$.

Aufgabe 5 (Warteschlangen): 2 + 7 = 9 Punkte

Betrachten Sie folgende Prioritätswarteschlange, welche mit einem Array der Länge 10 implementiert wurde.

↓				↓					
7	6	1	5						

a) Welches Element wird beim Aufruf von Get zurückgegeben?

b) Führen Sie folgende Operationen auf obiger Prioritätswarteschlange aus. Zeichnen Sie das Array nach jeder Änderung erneut. Sie müssen das Array pro Operation also möglicherweise mehrfach zeichnen. Zeichnen Sie außerdem den front und back Pointer ein.

i) Enq(8)
ii) Enq(2)
iii) Enq(3)
iv) Enq(9)
v) Deq()
vi) Deq()

Um die Notation zu verdeutlichen haben wir die ersten beiden Operationen bereits für Sie dargestellt. Zusätzlich zu dieser Notation kann es hilfreich sein sich die Prioritätswarteschlange als Binärbaum aufzuzeichnen. Es wird jedoch ausschließlich die Array-Notation gewertet.

↓				↓					
7	6	1	5						

i) Enq(8)

↓					↓				
7	6	1	5	8					

↓					↓				
7	8	1	5	6					

↓					↓				
8	7	1	5	6					

ii) Enq(2)

↓						↓			
8	7	1	5	6	2				

↓						↓			
8	7	2	5	6	1				

Aufgabe 6 (Binärbaum): 4 + 2 + 5 = 11 Punkte

a) Zeichnen Sie einen Binärbaum mit 8 Knoten, welcher eine möglichst geringe Höhe hat. Wie hoch ist Ihr Baum?

b) Wie viele Knoten kann ein Binärbaum mit der Höhe 12 maximal haben?

c) Zeichnen Sie einen balancierten Binärbaum mit der Höhe 4 mit möglichst wenigen Knoten. Wie viele Knoten hat ihr Baum?

Aufgabe 7 (Adjazenzmatrix): 3 + 3 + 4 = 10 Punkte

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Graph G graphisch an.

b) Berechnen Sie alle Knoten in G, die von dem ersten Knoten in genau 3 Schritten erreichbar sind. Geben Sie auch Zwischenschritte an.

c) Sei G' der Graph der als folgende Adjanzentmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist G isomorph zu G'? Falls ja, geben Sie den Isomorphismus, d.h. die Permutation der Knoten, an. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 8 (O-Notation): 2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $5 \cdot n^2 + 13 \cdot n - 16 \in O(n^2)$

b) $\sqrt{n} \in O(n)$

c) $n^3 \in O(\sum_{i=0}^{n} i)$

d) $f(n) \in \Omega(g(n))$ und $f(n) \in O(h(n))$ impliziert $g \in \Theta(h(n))$